OPCIÓN A

Ejercicio 1. Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \qquad para\ \ x\neq -1.$$

$a)$ $[1,5\ Puntos]$ Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

$b)$ $[1\ punto]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$a)$ Asíntotas verticales. Son rectas de la forma $x=a$ con $a\notin Dom(f)$ y verificando $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

Por tanto, comenzamos determinado el dominio de la función. Al tratarse de una función racional, el dominio será aquellos valores que no anulan el denominador. Esto es:

$$Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Como $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\infty$ la recta $x=-1$ es asíntota vertical de f. Además se tiene:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=+\infty$$

Asíntotas horizontales. Son rectas de la forma $y=a$, donde a es tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$.

$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=-\infty$ $\quad y \quad$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=+\infty$. Ambos límites se obtienen fácilmente al tratarse de una función racional donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por tanto, no existen asíntotas horizontales para la función.

Asíntotas oblicuas. Son rectas de la forma $y=mx+n$ con $m\neq 0$ y $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+4}{2x+2}=1$$

Ambos límites se obtienen fácilmente al tratarse de una función racional donde numerador y denominador tienen el mismo grado. Obsérvese además que se obtiene el mismo resultado tanto para $x\to-\infty$ como para $x\to+\infty$.

Finalmente la asíntota oblicua es $y=\frac{1}{2}x+1$. Además se tiene:

$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right) = 0^-$ Por lo que la función quedaría bajo la asíntota.

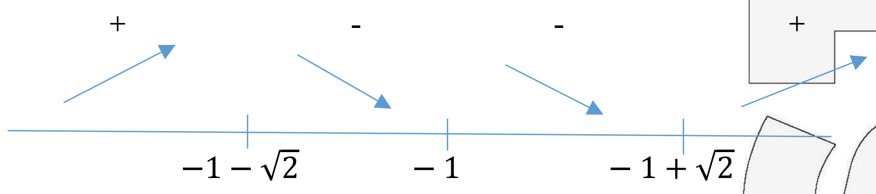
$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right) = 0^+$ Por lo que la función quedaría sobre la asíntota.

b) Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, estudiamos el signo de la primera derivada.

1. $f'(x) = \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}$

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$

3. Signo $(f'(x))$



4. **La función es creciente en $\left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-1-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(-1, -1+\sqrt{2}\right)$.**

Ejercicio 2. [2,5 Puntos] Sea la función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Como $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = dx$ y aplicando el cambio de variable se tiene:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt$$

Se obtiene de esta forma una integral racional. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+Bt}{t(1-t)}$$

$$1 + t = A(1-t) + Bt$$

$$Si\ t = 1 \Rightarrow 2 = B$$

$$Si\ t = 0 \Rightarrow 1 = A$$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{1-t} \right) dt = \ln|t| - 2\ln|1-t| + k\ con\ k \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \ln|e^x| - 2\ln|1-e^x| + k = x - 2\ln|1-e^x| + k \quad con\ k \in \mathbb{R}$$

Finalmente determinamos la primitiva que pasa por el punto $(1,1)$

$$1 - 2\ln|1-e| + k = 1 \Leftrightarrow k = 2\ln|1-e|$$

$$\boldsymbol{F(x) = x - 2\ln|1-e^x| + 2\ln|1-e|}$$

Ejercicio 3. Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comencemos imponiendo la condición $AX = XA$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices se tiene:

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Como $a + d = 1$ y $a = d \Rightarrow a + a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Con todo esto la matriz X es

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Imponiendo la condición de determinante 1

$$|X| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Las matrices son:

$$\boldsymbol{X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ y \ X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4. Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) $[1,25\ puntos]$ Halla los puntos de la recta r que equidista de los planos π_1 y π_2.

b) $[1,25\ puntos]$ Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

$a)$ Buscamos los puntos de la recta r que verifican la condición $dist(P, \pi_1) = dist(P, \pi_2)$.

La recta en forma paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ por lo que los puntos de la recta son de la forma $P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$.

Imponemos ahora la condición:

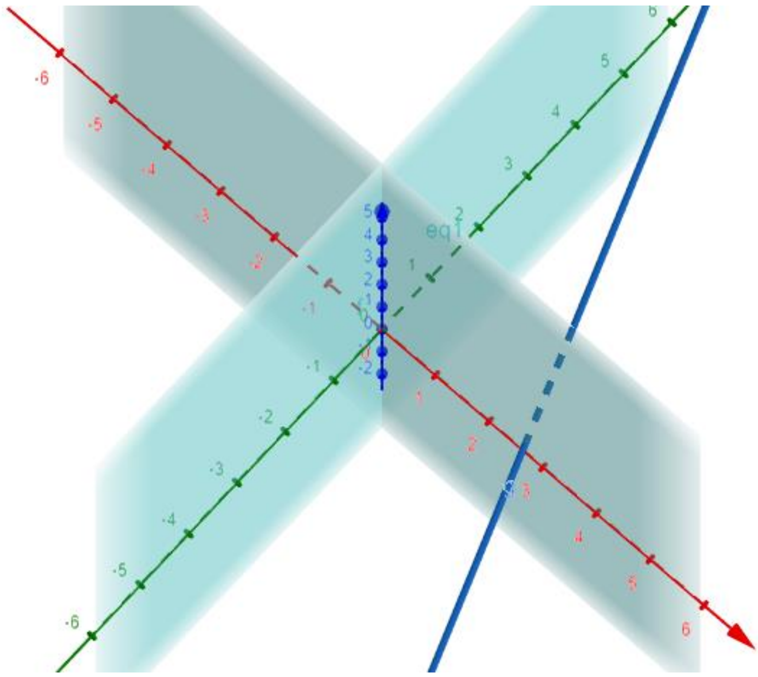
$$dist(P, \pi_1) = \frac{|2 - \lambda + 0 + 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |2 - \lambda|$$

$$dist(P, \pi_2) = \frac{|0 + 2 + 3\lambda + 0 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = |2 + 3\lambda|$$

Igualando ambas expresiones

$$|2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

Por lo que los puntos buscados son $\boldsymbol{P_1(2,2,1)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{P_2(4,-4,-1)}$.



C/ O´Donnell nº 26 41001 Sevilla
Tlf 954502598

b) Sea s la recta intersección de los dos planos.

$$s \equiv \begin{cases} x & = 0 \\ \quad y & = 0 \end{cases} \text{ en forma general.}$$

En forma paramétrica $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \gamma \end{cases}$ con $\gamma \in \mathbb{R}$.

Estudiamos la posición relativa entre r y s determinando el rango de las matrices

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{V_r} & \overrightarrow{V_s} \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} \overrightarrow{V_r} & \overrightarrow{V_s} & \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$$

Donde $\overrightarrow{V_r}$, P_r y $\overrightarrow{V_s}$, P_s son vector y punto respectivamente de r y s.

$\overrightarrow{V_r} = (-1, 3, 1)$ y $P_r(2, 2, 1)$

$\overrightarrow{V_s} = (0, 0, 1)$ y $P_s(0, 0, 0)$ y $\overrightarrow{P_sP_r} = (2, 2, 1)$

$rg(M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ Puesto que existe un menor de orden dos distinto de 0. Lo que implica que ambas rectas se cruzan o se cortan.

$rg(M^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ Por lo tanto, **ambas rectas se cruzan**.

C/ O´Donnell nº 26 41001 Sevilla
Tlf 954502598

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Considera la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = (x - a)e^x}$.

a) [1,25 puntos] Determina $\boldsymbol{a}$ sabiendo que la función tiene un punto crítico en $\boldsymbol{x = 0}$.

b) [1,25 puntos] Para $\boldsymbol{a = 1}$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de $\boldsymbol{f}$.

a) Los puntos críticos son aquellos que anulan la primera derivada, por lo tanto debe verificarse $f'(0) = 0$ pues $x = 0$ es un punto crítico.

$$f'(x) = e^x + (x - a)e^x = (x - a + 1)e^x$$

Como $f'(0) = 0 \Rightarrow (0 - a + 1)e^0 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 1}$.

b) Para determinar los puntos de inflexión hay que identificar los puntos donde se anula la segunda derivada. Como $a = 1$ se tiene:

$$f(x) = (x - 1)e^x \text{ y } f'(x) = xe^x$$

1. $f''(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$

2. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

3. Signo $(f''(x))$

- +

-1

4. Como la función $f''(x)$ cambia de signo entorno a $x = -1$, esto es que cambia su curvatura, el punto de inflexión es $\big(-1, f(-1)\big) = (\boldsymbol{-1, -2e^{-1}})$.

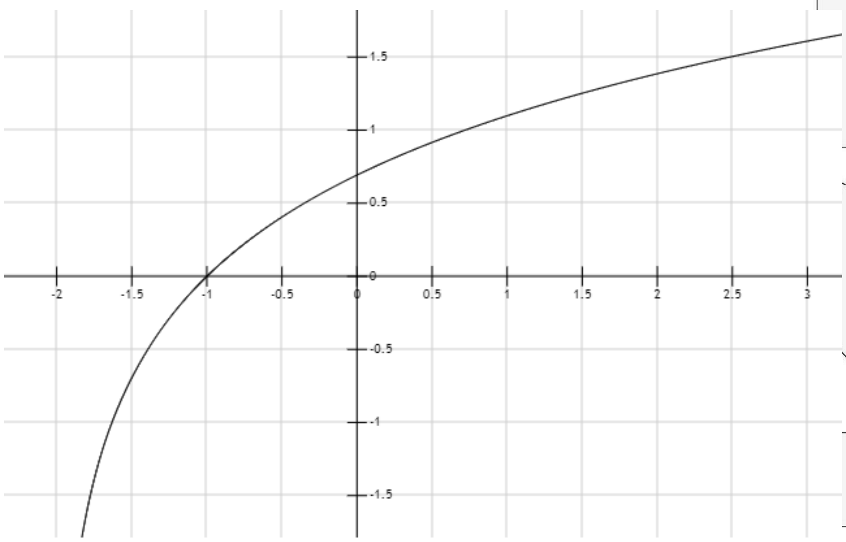
Nota: se ha comprobado que para $x = -1$ existe punto de inflexión de la función analizando el signo de $f''(x)$, a la misma conclusión se habría llegado comprobando que $f'''(-1) \neq 0$.

Ejercicio 2. Considera las funciones $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

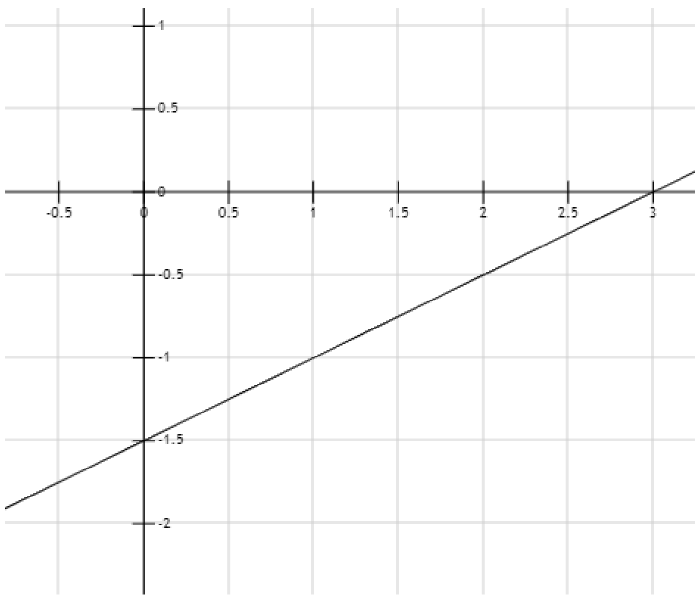
***a*) [1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcula los puntos de corte entre las dos gráficas).**

***b*) [1,5 puntos] Determina el área del recinto anterior.**

a) Ambas funciones son funciones elementales cuyas gráficas pueden obtenerse de manera sencilla. La función $f(x) = \ln(x+2)$ se obtiene a partir de la gráfica de $y = \ln x$ desplazando esta última 2 unidades hacia la izquierda. De esta forma su asíntota vertical seria $x = -2$.

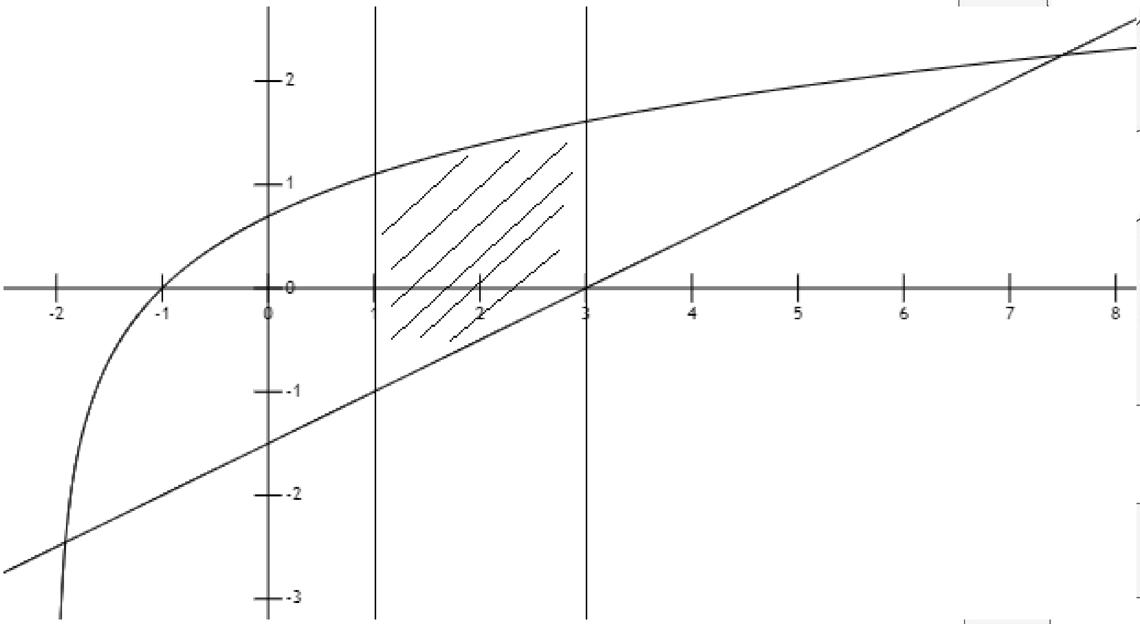


La función $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ es una recta y basta con asignar dos valores a x para determinar su gráfica $P(1,-1) y\ P(3,0)$.



C/ O´Donnell nº 26 41001 Sevilla
tlf 954502598

Y por último las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Con todo esto se tiene



Nota: Obsérvese que ambas gráficas poseen puntos de corte, sin embargo, se especifica que no son necesarios calcularlos, en primer lugar, no afectan al recinto que se pide y en segundo lugar, determinar dichos puntos de corte no es una tarea sencilla.

$b)$ Determinamos el área limitado como

$$A = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right) dx = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) dx =$$
$$= \left[x \ln|x+2| - x + 2\ln|x+2| - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_1^3 =$$
$$= (\mathbf{5\ln 5 - 3\ln 3 - 1})\boldsymbol{u^2}$$

La integral $\int \ln(x+2)\,dx = x\ln|x+2| - x + 2\ln|x+2|$ se obtiene por partes llamando

$$\begin{cases} u = \ln(x+2) \Rightarrow du = \dfrac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Nota: puesto que la función f está definida en el intervalo $(-2, +\infty)$ no es necesario escribir el argumento del logaritmo con valor absoluto.

Ejercicio 3. Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2-m} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2m-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2m^2-1} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$, **considera el sistema de ecuaciones lineales dado por** $\boldsymbol{X^tA = B^t}$. **Discútelo según los distintos valores de** $\boldsymbol{m}$.

Se trata de un sistema de ecuaciones escrito en forma matricial.

$$X^tA = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= ((2-m)x + y + mz \quad x + my + z \quad (2m-1)x + y + z)$$

$$B^t = (2m^2-1 \quad m \quad 1)$$

Igualando ambas matrices se tiene

$$\begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2 - 1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases}$$

Llamemos $M = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes del sistema y $M^* = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriz ampliada.

Determinemos el rango de ambas matrices en función de m, para ello calculamos el determinante de M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2m^3 + 6m - 4$$

$$-2m^3 + 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3 \Rightarrow rg(M^*) = 3$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado.
- Si $m = 1 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow rg(M) < 3$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(M) = 1$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(M^*) = 1$$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado.

- Si $m = -2 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow rg(M) < 3$.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(M) = 2$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(M^*) = 3$$

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible.

Ejercicio 4. Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $\boldsymbol{A(1,1,0), B(1,0,2) y\ C(0,2,1)}$.

$\boldsymbol{a}$) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

$\boldsymbol{b}$) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

a) El área del triángulo se calcula como la mitad del área del paralelogramo definido por dos vectores, esto es:

$$Área = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

Donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores que lo definen.

En nuestro caso, los vectores $\overrightarrow{AB} = (0,-1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,1,1)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-2,-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{14}$$

Y finalmente $\boldsymbol{Área = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2}$

b) Para determinar el coseno del ángulo, aplicamos la fórmula del producto escalar entre dos vectores.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,1,1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-1,2) \cdot (-1,1,1) = 1$$

$$1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \boldsymbol{\cos \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{15}}}$$