Ejercicio 1.-

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b. **(2.5 puntos)**

Solución:

$f(x)$ tiene una asíntota oblicua en una recta $y = mx + n$, que cumple las siguientes condiciones:

- Pasa por el punto $(1, 1)$, es decir, $\boxed{y(1) = 1}$
- Tiene pendiente 2, es decir, $\boxed{m = 2}$

Sabiendo que $y(1) = m + n = 1 \overset{m=2}{\Longrightarrow} 2 + n = 1 \Longrightarrow \boxed{n = -1}$

Luego la asíntota oblicua de la función es $y = 2x - 1$

Por otro lado, se sabe que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - n)$. Por tanto:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2+b)x+2}{x-1} = 2 + b = -1 \Longrightarrow b = -3$$

Luego, $\boxed{a = 2}$ y $\boxed{b = -3}$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Ejercicio 2.-

Considera la función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{36(\text{sen}(x) - ax)}{x^3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a. **(1.5 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Vamos a imponer la condición de continuidad en el punto de ruptura $x = 0$

$f(0) = -6$

$$\lim_{x\to 0^-} (3x-6)e^x = -6$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{36(\text{sen}(x)-ax)}{x^3} = \frac{0}{0} = indeterminación$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{36(\cos(x)-a)}{3x^2} = \frac{36(1-a)}{0}.$$

El límite tiene que ser finito, por tanto $1 - a = 0 \iff \boxed{a = 1}$

Seguimos aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{36(-\text{sen}(x))}{6x} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

Vuelvo a aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{36(-\cos(x))}{6} = -\frac{36}{6} = -6$$

En efecto, se observa que, como $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = -6$, la función es continua.

Luego, para $\boxed{a = 1}$ la función será continua en $\mathbb{R}$

b) Para hallar la recta tangente a f en $x = -1$, debemos coger el primer trozo de función: $f_1(x) = (3x-6)e^x$, por estar definida en $x \leq 0$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ viene dada por:

$y - f_1(-1) = f_1'(-1)(x+1)$

Derivamos la función:

$f_1'(x) = 3e^x + (3x-6)e^x = e^x(3x-3)$

Hallamos $f_1(-1)$ y $f_1'(-1)$:

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

$f_1(-1) = -\frac{9}{e}$

$f_1'(-1) = -\frac{6}{e}$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente obtenemos que:

$y - \left(-\frac{9}{e}\right) = \left(-\frac{6}{e}\right)(x+1);$

$y = -\frac{6}{e}x - \frac{6}{e} - \frac{9}{e};$

La ecuación de la recta tangente es: $\boxed{y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}}$

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.
C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Ejercicio 3.-

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1 punto)**

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) Para estudiar la monotonía, hay que estudiar el signo de la derivada.

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 4x^3 = 0$

$4x^2(3 - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$+$	$-$
	↗ Crece	↗ Crece	↘ Decrece

Por tanto, la función crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$

b) Para el esbozo de la gráfica, sería conveniente sacar el punto máximo (aptdo. a) y los puntos de corte con los ejes.

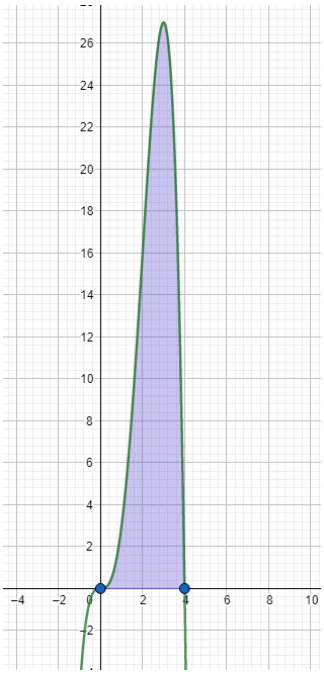
Del apartado anterior, $x = 3$ es un máximo con valor $f(3) = 27$

Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$f(x) = 0;$

$x^3(4 - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son: $O(0, 0)$ y $P(4, 0)$



Luego el área de la región limitada por la función y el eje de abscisa es:

$$A = \int_0^4 (4x^3 - x^4)\, dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = 4^4 - \frac{4^5}{5} = \frac{256}{5} = 51.2\ u^2$$

Por tanto, el área de la región es $\boxed{51.2\ u^2}$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Ejercicio 4.-

Considera la función $F: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x \left(2t + \sqrt{t}\right) dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$. **(2.5 puntos)**

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$ es:

$$y - F(1) = F'(1)(x - 1)$$

Calculamos $F(1)$ y $F'(1)$:

$$F(1) = \int_0^1 \left(2t + \sqrt{t}\right) dt = \left[t^2 + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^1 = \left[t^2 + \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Por el teorema fundamental del cálculo de integral, sabemos que $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$, por tanto, $F'(1) = 3$

Luego la ecuación de la recta tangente es:

$y - \frac{5}{3} = 3(x - 1);$

$y = 3x - 3 + \frac{5}{3};$

$y = 3x - \frac{4}{3}$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$ es $\boxed{y = 3x - \frac{4}{3}}$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Ejercicio 5.-

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**

b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) Escribimos la matriz ampliada: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m+\frac{2}{5} \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$|A| = -15m + 4 - 4 - 6m^2 = 0 \iff -6m^2 - 15m = 0;$

$-3m(2m+5) = 0 \iff \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$

Empezamos la discusión usando el teorema de Rouché – Fröbenius para deducir su clasificación.

CASO 1: Si $m \neq 0 \; y \; m \neq -\frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}} \; de \; incógnitas \Longrightarrow$ $S.compatible\ determinado$ $(1\ única\ solución)$

CASO 2: Si $m = -\frac{5}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{array}\right)$$

- Calculo el rango de A

  Como $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{15}{2} & 0 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 2$

- Calculo el rango de A^*

  Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{vmatrix} = -\frac{42}{5} + 15 + \frac{42}{5} = 15 \neq 0 \Longrightarrow rg(A^*) = 3$

Como $rg(A) \neq rg(A^*) \Longrightarrow S.incompatible\ (no\ tiene\ solución)$

CASO 3: Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{array}\right)$$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

- Calculo el rango de A

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 2$
- Calculo el rango de A^*

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow rg(A^*) = 2$

Como $rg(A) = rg(A^*) < nº\ de\ incógnitas \Longrightarrow S.compatible\ indeterminado\ (infinitas\ soluciones)$

Resumiendo:

Si $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2} \Longrightarrow$ Sistema es compatible determinado (única solución)

Si $m = 0 \Longrightarrow$ Sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si $m = -\frac{5}{2} \Longrightarrow$ Sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Para $m = 0$, tendríamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Por lo que $\boxed{x = \frac{2}{5}}$

Sea $\boxed{y = \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, de la 2º ecuación obtenemos que: $\boxed{z = 2\lambda - 1}$

Comprobamos que la segunda ecuación se verifica para estos tres valores:

$5 \cdot \frac{2}{5} - 4\lambda + 2(2\lambda - 1) = 2 - 4\lambda + 4\lambda - 2 = 0$

Para la segunda parte del apartado, como $x = \frac{2}{5} \neq 0$, no existe ninguna solución en la que la variable x sea nula.

Luego la solución del sistema es $\left(\frac{2}{5}, \lambda, 2\lambda - 1\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

No hay solución en la que $x = 0$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Ejercicio 6.-

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que, por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora? **(2.5 puntos)**

Solución:

$x = nº\ de\ botellas\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$

$y = nº\ de\ garrafas\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$

$z = nº\ de\ bidones\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$

Una botella necesita 50 gramos de polietileno, lo que equivale a 0,05 kg

Una garrafa necesita 100 gramos de polietileno, lo que equivale a 0,1 kg

Por tanto, el uso del polietileno por cada hora viene dada por la ecuación: $0{,}05\,x + 0{,}1\,y + z = 10$

Se debe producir el doble de botellas que de garrafas significa que: $x = 2y \Longrightarrow x - 2y = 0$

Las máquinas producen en total 52 productos cada hora significa que: $x + y + z = 52$

Por tanto, el sistema de ecuaciones que nos queda sería:

$$\begin{cases} 0{,}05x + 0{,}1y + z = 10 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera fila por 20 para eliminar decimales:

$$\begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando la regla de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 20 + 40 - 2 = 56$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 2 & 20 \\ 0 & -2 & 0 \\ 52 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-400+2080}{56} = \frac{1680}{56} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 20 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 52 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1040-200}{56} = \frac{840}{56} = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 200 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 52 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-104+200+400-104}{56} = \frac{392}{56} = 7$$

Por tanto, deben de producirse 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones cada hora.

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Ejercicio 7.- Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$

Solución:

a) Para calcular un plano perpendicular a la recta s, el vector normal de dicho plano coincide con el vector director de la recta s.

Por tanto, $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

Teniendo en cuenta que las coordenadas del vector normal son los coeficientes de x, y, z de la ecuación general del plano, tenemos que:

$-2x + y + 2z + D = 0$

Como este plano pasa por el punto $P(1, 0, -5)$, sustituyendo obtendríamos el valor del término independiente D:

$-2 - 10 + D = 0;$

$D = 12$

Luego, el plano perpendicular a s y que pasa por P es: $-2x + y + 2z + 12 = 0$

b) El seno del ángulo entre la recta r y el plano π viene dado por:

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\vec{n}|}$$

donde $\overrightarrow{d_r}$ y $\vec{n}$ es el vector director de la recta r y el vector normal del plano respectivamente.

Calculamos $\overrightarrow{d_r} = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-8, -7, -5)$

El vector normal de π es: $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

Luego,

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|16-7-10|}{\sqrt{(-8)^2+(-7)^2+(-5)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}}$$

Por tanto, $sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{1}{3\sqrt{138}}$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Ejercicio 8.-

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

De la recta r conocemos un punto $A(-3,-4,3)$ y su vector director, $\overrightarrow{d_r} = (2,2,3)$.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$

De la recta s conocemos los puntos P y Q y su vector director lo hallamos determinando $\overrightarrow{PQ}$

Por tanto, $\overrightarrow{d_s} = (a-1,1,-2)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x = 1 + (a-1)\beta \\ y = \beta \\ z = 2 - 2\beta \end{cases}$

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \\ \overrightarrow{AP} \end{pmatrix}$, r y s se cortarán en un punto si $rg(M) = rg(M^*) = 2$

$\overrightarrow{AP} = (4,4,-1)$

Construyo la matriz M y estudio su rango:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0 \Longrightarrow rg(M) = 2$

Construyo la matriz M^* y estudio su rango:

$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Esta matriz tendrá rango igual a 2 si $|M^*| = 0$

$|M^*| = -2 + 12a - 12 - 16 - 12 + 16 + 2a - 2 = 14a - 28$

$14a - 28 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Por tanto, r y s se cortan en un punto si $\boxed{a = 2}$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Para hallar el punto de corte de ambas rectas, igualamos las ecuaciones paramétricas para obtener los valores de λ y β

$$\begin{cases} -3+2\lambda = 1+\beta \\ -4+2\lambda = \beta \\ 3+3\lambda = 2-2\beta \end{cases}$$

Sustituyendo $\beta = -4+2\lambda$ en la primera y tercera ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} -3+2\lambda = 1-4+2\lambda \\ 3+3\lambda = 2+8-4\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \text{ (Se verifica la ecuación)} \\ 7\lambda = 7 \end{cases}$$

Por tanto, $\lambda = 1$ y $\beta = -2$

Para sacar el punto de corte, sustituimos λ o β en r o s respectivamente.

$x = -3+2 = -1;$

$y = -4+2 = -2;$

$z = 3+3 = 6$

Por tanto, el punto de corte de r y s es $(-1,-2,6)$

C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.