**BLOQUE A**

**Ejercicio 1.-**

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$

**a) (0.7 puntos)** Determine para qué valores del parámetro $a$, la matriz $A$ tiene inversa.

**b) (1 punto)** Para $a = 1$, calcule la inversa de $A$.

**c) (0.8 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**Solución:**

**a)** La matriz $A$ tiene inversa si $|A| \neq 0$

Calculamos el determinante de $A$ e igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = -8 - a = 0 \Leftrightarrow a = -8$$

Por tanto, la matriz $A$ tiene inversa si $a \neq -8$

**b)** Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos la matriz $A^{-1}$:

**Primero:** Como $|A| = -1 - 8 = -9 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

**Segundo:** Calculamos la matriz adjunta de $A$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto, $Adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

**Tercero:** Trasponemos la matriz adjunta.

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

**Cuarto:** $A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$



C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net

Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

**c)** $AX = B^t \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$

$$X = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Luego, $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**Ejercicio 2.-**
Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19 \qquad 3x - 4y \leq -13 \qquad x \geq -7 \qquad -x - y \geq 2$$

**a) (1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

**b) (0.5 puntos)** ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

**c) (0.5 puntos)** Responda de forma razonada si la función $G(x,y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

**Solución:**
**a)** Se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 5x - 4y \leq -19 \ (\boldsymbol{r_1}) \\ 3x - 4y \leq -13 \ (\boldsymbol{r_2}) \\ x \geq -7 \ (\boldsymbol{r_4}) \\ -x - y \geq 2 \ (\boldsymbol{r_3}) \end{cases}$$

Vamos a esbozar el recinto limitado por las restricciones del problema. Para ello vamos a construir una tabla de valores para cada recta y determinar cuál sería la región que debemos de tomar:

$\boldsymbol{r_1: 5x - 4y = -19}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 4,75 |
| −3,8 | 0 |

Si tomamos el punto $(0,0)$, sustituyendo en la inecuación $5x - 4y \leq -19$ tenemos que $0 \leq -19$ (FALSO). Por tanto, la región estaría por "encima" de la recta $r_1$.

$\boldsymbol{r_2: 3x - 4y = -13}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 3,25 |
| $-4,\hat{3}$ | 0 |

Si tomamos el punto $(0,0)$, sustituyendo en la inecuación $3x - 4y \leq -13$ tenemos que $0 \leq -13$ (FALSO). Por tanto, la región estaría por "encima" de la recta $r_2$.

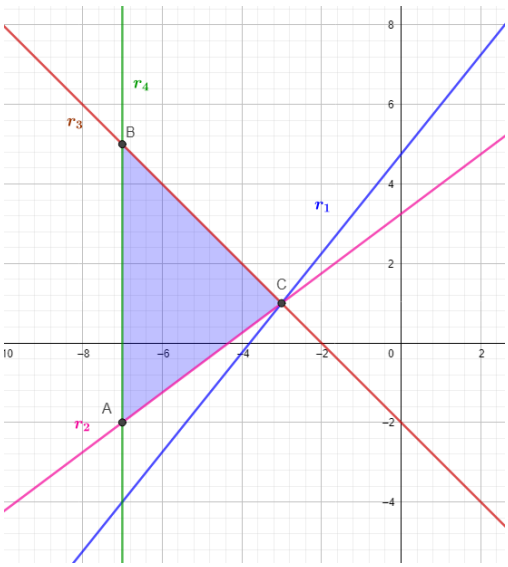
$\boldsymbol{r_3: -x - y = 2}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | −2 |
| −2 | 0 |

Si tomamos el punto $(0,0)$, sustituyendo en la inecuación $-x - y \geq 2$ tenemos que $0 \geq 2$ (CIERTO). Por tanto, la región estaría por "debajo" de la recta $r_3$.

Por tanto, la región factible es la que se muestra en la representación gráfica siguiente:


Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.




Calculemos los vértices:

- El vértice $A$ es el punto de corte de la recta $r_4$ y $r_2$: $\begin{cases} x = -7 \\ 3x - 4y = -13 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos que $A(-7,-2)$

- El vértice $B$ es el punto de corte de la recta $r_4$ y $r_3$: $\begin{cases} x = -7 \\ -x - y = 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos que $B(-7,5)$

- El vértice $C$ es el punto de corte de la recta $r_1$ y $r_3$: $\begin{cases} 5x - 4y = -19 \\ -x - y = 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos que $C(-3,1)$

Por tanto, la región factible es la que se muestra en la imagen anterior de vértices $A(-7,-2)$, $B(-7,5)$ y $C(-3,1)$

**b)** Sustituimos las coordenadas de cada vértice en la función objetivo $G(x,y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$

$G(A) = G(-7,-2) = \frac{7}{5} - 5 = -\frac{18}{5}$

$G(B) = G(-7,5) = \frac{7}{5} + \frac{25}{2} = \frac{14+125}{10} = \frac{139}{10}$

$G(C) = G(-3,1) = \frac{3}{5} + \frac{5}{2} = \frac{6+25}{10} = \frac{31}{10}$

Por tanto, La función $G(x,y)$ alcanza su **mínimo** en el punto $A(-7,-2)$ con un valor de $-\frac{18}{5}$ y alcanza su **máximo** en el punto $B(-7,5)$ con un valor de $\frac{139}{5}$.

**c)**

La función $G(x,y)$ no puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ ya que supera el valor máximo de la función, que es $\frac{139}{5}$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**BLOQUE B**

**Ejercicio 3.-**

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & si \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

**a) (1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $f$ en su dominio.

**b) (0.8 puntos)** Estudie la monotonía de la función $f$ y calcule el mínimo.

**c) (0.7 puntos)** Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx$

**Solución:**

**a)** Como las funciones parciales que forman $f(x)$ están bien definidas en los intervalos donde se definen, el dominio de la función es: $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$

La función es continua y derivable en su dominio de definición salvo, quizás, en $x = 0$

- **Continuidad en $x = 0$**

  $f(0) = 0$

  $\lim_{x \to 0^+} (x^2 - 2x) = 0$

  $\lim_{x \to 0^-} 2^{x+1} = 2$

  Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, la función no es continua en $x = 0$, presentando una discontinuidad de salto finito.

  Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Derivabilidad en $x = 0$**

  Como en $x = 0$ hemos visto que la función no es continua, implica que tampoco es derivable en dicho punto.

  Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Resumiendo, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

**b)** Para estudiar la monotonía, vamos a hallar la primera derivada de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2^{x+1} \cdot \ln 2 & si \quad x < 0 \\ 2x - 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$

- **Si $x < 0$**

  $2^{x+1} \cdot \ln 2 = 0$

  No tiene solución pues la exponencial nunca se anula.

- **Si $x > 0$**

  $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

| **Intervalos** | $(-\infty, \mathbf{0})$ | $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ | $(\mathbf{1}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| **Signo de $f'(x)$** | $+$ | $-$ | $+$ |
| | $\nearrow$ Crece | $\searrow$ Decrece | $\nearrow$ Crece |

Luego $f(x)$ crece en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ y decrece en $(0,1)$

La función tiene un mínimo en $x = 1$ con $f(-1) = 1 - 2 = -1$

Por tanto, $f(x)$ crece en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ y decrece en $(0,1)$ y tiene un punto mínimo en $P(1, -1)$

**c)** $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}\,dx + \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2\cdot\ln 2}\right] + \left[\frac{8}{3} - 4\right] = \frac{3}{2ln2} - \frac{4}{3} = 0.83$

Por tanto, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0.83$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**Ejercicio 4.-**

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2t-0.3 & si \quad 0.2\le t\le 1.8\\ 0.1t-0.12 & si \quad 1.8<t\le 5\\ -0.5t^2+8.3t-28.62 & si \quad 5<t\le 10\end{cases}$$

Donde $t$ es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

**a) (1.5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.

**b) (1 punto)** ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

**Solución:**

**a)** Como las funciones parciales que forman $f(t)$ están bien definidas en los intervalos donde se definen, el dominio de la función es: $Dom\ f(x)=[0.2,10]$

La función es continua y derivable en su dominio de definición salvo, quizás, en $t=1.8$ y $t=5$

- **Continuidad en $t=1.8$**

  $f(1.8)=-(1.8)^2+2\cdot 1.8-0.3=0.06$

  $\lim\limits_{t\to 1.8^+}(0.1t-0.12)=0.06$

  $\lim\limits_{t\to 1.8^-}(-t^2+2t-0.3)=0.06$

  Luego, $f(t)$ es continua en $t=1.8$

- **Continuidad en $t=5$**

  $f(5)=0.1\cdot 5-0.12=0.38$

  $\lim\limits_{t\to 5^+}(-0.5t^2+8.3t-28.62)=0.38$

  $\lim\limits_{t\to 5^-}(0.1t-0.12)=0.38$

  Luego, $f(t)$ es continua en $t=5$

Por tanto, $f(t)$ es continua en $[0.2,10]$

Para hallar la derivabilidad, derivamos la función:

$$f'(t)=\begin{cases}-2t+2 & si \quad 0.2\le t<1.8\\ 0.1 & si \quad 1.8<t<5\\ -t+8.3 & si \quad 5<t\le 10\end{cases}$$

- **Derivabilidad en $t=1.8$**

  $f'(1.8^+)=\lim\limits_{t\to 1.8^+}0.1=0.1$

  $f'(1.8^-)=\lim\limits_{t\to 1.8^-}(-2t+2)=-1.6$

  Como $f'(1.8^+)\neq f'(1.8^-)$, la función no es derivable en $t=1.8$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

- **Derivabilidad en $t = 5$**

  $f'(5^+) = \lim_{t \to 5^+} (-t + 8.3) = 3.3$

  $f'(5^-) = \lim_{t \to 5^-} 0.1 = 0.1$

  Como $f'(5^+) \neq f'(5^-)$, la función no es derivable en $t = 5$

  Luego, $f(t)$ es derivable en $[0.2, 1.8) \cup (1.8, 5) \cup (5, 10]$

Resumiendo, $f(t)$ es continua en $[0.2, 10]$ y derivable en $[0.2, 1.8) \cup (1.8, 5) \cup (5, 10]$

**b)** Estudiemos el signo de $f'(t)$

- **Si $0.2 < t < 1.8$**

  $-2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

- **Si $1.8 < t < 5$**

  $0.1 = 0$

  No tiene solución, es decir, no hay extremos en su intervalo de definición.

- **Si $5 < t < 10$**

  $-t + 8.3 = 0 \Leftrightarrow t = 8.3$

| **Intervalos** | $(0.2, 1)$ | $(1, 1.8)$ | $(1.8, 5)$ | $(5, 8.3)$ | $(8.3, 10)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signo de $f'(x)$** | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| | ↗ Crece | ↘ Decrece | ↗ Crece | ↗ Crece | ↘ Decrece |

Como $f(t)$ crece en $(0.2,1), (1.8, 5)$ $y$ $(5, 8.3)$ y decrece en $(1, 1.8)$ $y$ $(8.3, 10)$, entonces los máximos de la función se encuentran en $t = 1$ y $t = 8.3$

Veamos qué valor es el más alto para determinar el máximo absoluto:

$f(1) = -1^2 + 2 - 0.3 = 0.7$

$f(8.3) = -0.5 \cdot 8.3^2 + 8.3 \cdot 8.3 - 28.62 = 5.825$

Por tanto, el número de diagnosticados es máximo a los 8.3 meses, siendo de un número máximo de 5825 personas.


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**BLOQUE C**

**Ejercicio 5.-**

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

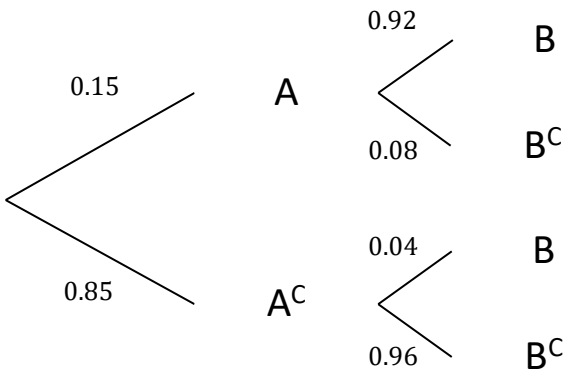
**a) (1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

**b) (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

**c) (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

**Solución:**

Sea $A = "padecer\ la\ enfermedad"$ y $B = "Dar\ positivo\ en\ el\ test"$




**a)** Por la Probabilidad Total, se tiene que

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A^C) \cdot P\left(B/A^C\right) = 0.15 \cdot 0.92 + 0.85 \cdot 0.04 = 0.172$$

Por el Teorema de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15 \cdot 0.92}{0.172} = 0.8023$$

La probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma es de 0.8023

**b)** $P(A \cap B^C) = 0.15 \cdot 0.08 = 0.012$

La probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo es de 0.012

**c)** Por el Teorema de Bayes:

$$P(A/B^C) = \frac{P\left(A \cap B^C\right)}{P\left(B^C\right)} = \frac{0.15 \cdot 0.08}{1 - 0.172} = 0.0145$$

La probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma es de 0.0145


Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**Ejercicio 6.-**

En una comunidad de vecinos, el $90\ \%$ de sus miembros tiene vehículo propio, el $40\ \%$ hace uso del transporte público y un $3\ \%$ ni tiene vehículo ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

**a) (1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

**b) (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tengo vehículo propio.

**c) (1 punto)** Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

**Solución:**

Sea $A = "Tener\ vehículo\ propio"$ y $B = "Usar\ transporte\ público"$. Los datos del problema son:

$P(A) = 0.9$

$P(B) = 0.4$

$P(A^C \cap B^C) = 0.03$

**a)** ¿$P(A \cup B)$?

$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$

Sustituyendo:

$0.03 = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.03 = 0.97$

La probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público es de $0.97$

**b)** ¿$P(A^C \cap B)$?

$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Calculamos $P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = 0.9 + 0.4 - 0.97 = 0.33$

Luego, $P(A^C \cap B) = 0.4 - 0.33 = 0.07$

La probabilidad de que use el transporte público y no tengo vehículo propio es de $0.07$

**c)** $P(B/A^C) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(A^C)} = \frac{0.07}{1-0.9} = 0.7$

La probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio es de $0.7$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**BLOQUE D**

**Ejercicio 7.-**

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

**a) (1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 99.5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE

**b) (1 punto)** Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

**Solución:**

**a)** Sea $n = 250$

$p = \frac{115}{250} = 0.46 \Longrightarrow q = 1 - 0.46 = 0.54$

$n.c = 99.5\ \%$

$\frac{1+0.995}{2} = 0.9975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2.81$

Calculamos el intervalo de confianza con estos datos: $IC = \left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$

$$IC = \left(0.46 - 2.81 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}}, 0.46 + 2.81 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}}\right) = (0.3714;\ 0.5485)$$

El intervalo de confianza para estimar la proporción real de los residentes que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un nivel de confianza al 99.5 % es $IC = (0.3714; 0.5485)$

**b)** Vamos a estimar el tamaño mínimo de la con un error inferior al 5 % ($E < 0.05$)

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$

Despejando $n$, obtenemos que:

$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot p \cdot q$

Sustituyendo:

$n = \left(\frac{2.81}{0.05}\right)^2 \cdot 0.46 \cdot 0.54 = 784.56$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra con un error inferior al 5 % debe de ser de 785 personas.


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.

**Ejercicio 8.-**

Sea $X$ una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica $4$.

**a) (0.5 puntos)** ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño $12$ de la variable aleatoria $X$?

**b) (1 punto)** Para estimar la media poblacional de la variable $X$, se toma una muestra aleatoria de tamaño $12$, obteniéndose los siguientes resultados

$$11.8 \quad 10 \quad 9.8 \quad 12 \quad 9.7 \quad 10.8 \quad 9.6 \quad 11.3 \quad 10.4 \quad 12.2 \quad 9.1 \quad 10.5$$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al $97\ \%$ para estimar la media poblacional.

**c) (1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que $1.2$

**Solución:**

**a)** $X \sim N(\mu, \sigma) = N(\mu, 4)$

Entonces, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{4}{\sqrt{12}}\right) = N(\mu; 1.15)$

Por tanto, la desviación típica de la distribución de las medias es: $1.15$

**b)** Calculamos la media de los datos:

$$\bar{x} = \frac{11.8+10+9.8+12+9.7+10.8+9.6+11.3+10.4+12.2+9.1+10.5}{12} = 10.6$$

$n.c = 97\ \%$

$\frac{1+0.97}{2} = 0.985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$

Calculamos el intervalo de confianza con estos datos: $IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$IC = (10.6 - 2.17 \cdot 1.15; 10.6 + 2.17 \cdot 1.15) = (8.1045; 13.0955)$

Por tanto, el intervalo de confianza es $(8.1045; 13.0955)$

**c)** Calculemos el tamaño mínimo de la muestra tal que $E < 1.2$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Despejando $n$:

$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{n}\right)^2$

Sustituyendo: $n = \left(\frac{2.17 \cdot 4}{1.2}\right)^2 = 52.321$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra con un error inferior a $1.2$ es de $n = 53$


C/ O´DONNELL 26. 41001. SEVILLA
TEL. 954 502 598 www.claustro.net
claustro@claustro.net
Prohibida la reproducción total o parcial ©2.021 CLAUSTRO S.L.