RESOLUCIÓN EXAMEN DE

MATEMÁTICAS

PAU ANDALUCÍA 2025

ACADEMIA CLAUSTRO

Ejercicio 1

Sean las incógnitas:

x: precio de jersey, y: precio de camisa, z: precio de pantalón,

el sistema de ecuaciones viene definido por:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=80 \\ x=\dfrac{1}{3}\cdot(y+z) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=80 \\ 3x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

a) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=80 \\ 3x-y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 4x=80 \ \rightarrow \ x=20$$

Por tanto, se puede conocer que el precio de un jersey es de 20 €.

Si queremos obtener el precio de una camisa, sabemos que:

$$3x-y-z=0 \ \rightarrow \ y+z=3x=60$$

Luego, al tener una ecuación con dos incógnitas, no se podrá determinar el precio único de una camisa dado que tiene infinitas soluciones.

b) Conociendo los precios que Juan ha gastado en la compra, y los respectivos descuentos, podemos establecer un sistema de tres ecuaciones, siendo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=80 \\ 3x-y-z=0 \\ 0{,}7x+0{,}6y+0{,}8z=57 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=80 \\ 3x-y-z=0 \\ 7x+6y+8z=570 \end{array}\right\}$$

Obtenemos el determinante de la matriz A y resolvemos según Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 8+3\cdot 6\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 7-1\cdot(-1)\cdot 7-3\cdot 1\cdot 8-1\cdot 6\cdot(-1)=-8$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 80 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 570 & 6 & 8 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-160}{-8}=20$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 80 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 570 & 8 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-200}{-8}=25$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 80 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & 570 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-280}{-8}=35$$

Por tanto, los precios son 20 € el jersey, 25 € la camisa y 35 € el pantalón.

Ejercicio 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-ax+2-2\cos(x)}{e^x-xcos(x)-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Regla\ de\ L'Hôpital}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-a+2sen(x)}{e^x-\cos(x)+xsen(x)}=\frac{1-a}{0}$$

Como el límite debe de ser finito, obligamos que el numerador del límite sea igual a cero, por lo que:

$$1-a=0\ \rightarrow\ \ a=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+2sen(x)}{e^x-\cos(x)+xsen(x)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Regla\ de\ L'Hôpital}\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)+2\cos(x)}{e^x-sen(x)+sen(x)+xcos(x)}=2$$

Ejercicio 3

Sabemos que la función está definida desde el cero hasta el infinito, por lo que su dominio será:

$$Dom\ f(x)=(0,+\infty)$$

a) Como piden la asíntota horizontal, debemos hacer el límite de la función cuando tiende a infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{\ln x}{x^2}\right)=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{Regla\ de\ L'Hôpital}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función, se estudian los signos de los intervalos de los valores de x donde la primera derivada es nula, siendo para $a=0$:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}\quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot\ln x}{(x^2)^2}=\frac{x-2x\cdot\ln x}{x^4}=0\quad\rightarrow\quad x-2x\cdot\ln x=0$$

$$\rightarrow\ x\cdot(1-2\cdot\ln x)=0\ \begin{cases}x=0, pero\ no\ es\ válido\ debido\ a\ que\ no\ está\ en\ el\ dominio\\ 1-2\cdot\ln x=0\ \rightarrow\ 2\cdot\ln x=1\ \rightarrow\ \ln x=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ x=\sqrt{e}\end{cases}$$

Intervalos	$(\mathbf{0},\sqrt{\boldsymbol{e}})$	$(\sqrt{\boldsymbol{e}},+\infty)$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$+$	$-$
$\boldsymbol{f(x)}$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0,\sqrt{e})$, decreciente en $(\sqrt{e},+\infty)$ y un máximo relativo en $(\sqrt{e},{}^{1}/_{2e})$.

Ejercicio 4

a) Se sabe que el volumen de un tetraedro viene determinado por la fórmula:

$$V_T=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|$$

Por tanto, se definen los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, siendo:

$$\overrightarrow{OA}=(0,2,-2);\quad\overrightarrow{OB}=(1,2,m);\quad\overrightarrow{OC}=(2,3,2)$$

Por tanto, el volumen vendrá dado por la ecuación:

$$V_T=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}0&2&-2\\1&2&m\\2&3&2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot|(-6+4m+8-4)|=\frac{1}{6}\cdot|(4m-2)|=3$$

Luego el valor de m, para que el volumen sea de 3, será:

$$\frac{1}{6}\cdot|(4m-2)|=3 \;\rightarrow\; \begin{cases} +(4m-2)=18 \;\rightarrow\; 4m=20 \;\rightarrow\; m=5 \\ -(4m-2)=18 \;\rightarrow\; 4m=-16 \;\rightarrow\; m=-4 \end{cases}$$

b) Para el valor de $m=0$, podemos definir el plano de la siguiente forma:

$$\pi \equiv \begin{cases} A=\ (0,2,-2) \\ \overrightarrow{dr_1}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2) \\ \overrightarrow{dr_2}=\overrightarrow{AC}=(2,1,4) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\cdot x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\cdot(y-2) + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(z+2)$$
$$=(0-2)\cdot x-(4-4)\cdot(y-2)+(1-0)\cdot(z+2) \;\rightarrow\; \pi\equiv -2x+z+2=0$$

Montamos una recta que corte perpendicularmente al plano, que pase por el punto $O\ (0,0,0)$.

$$r\equiv\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

A continuación, se introduce la ecuación de la recta paramétrica en el plano, para obtener el valor del punto de corte:

$$-2\cdot(-2\lambda)+(\lambda)+2=0 \;\rightarrow\; 4\lambda+\lambda+2=0 \;\rightarrow\; \lambda=-\frac{2}{5} \;\rightarrow\; M=\left(\frac{4}{5},0,-\frac{2}{5}\right)$$

Luego, la distancia será:

$$d\ (O,\pi)=d\ (O,M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+(0)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ u$$

Ejercicio 5

a) Como queremos buscar la ecuación del plano que contiene a un punto P y la recta r, podemos determinar lo siguiente:

$$\pi \equiv \begin{cases} P=\ (1,1,1) \\ \overrightarrow{dr_1}=\overrightarrow{dr}=(1,2,2) \\ \overrightarrow{dr_2}=\overrightarrow{PR}=(0,1,2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\cdot(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(z-1)$$
$$=(4-2)\cdot(x-1)-(2-0)\cdot(y-1)+(1-0)\cdot(z-1) \;\rightarrow\; \pi\equiv 2x-2y+z-1=0$$

b) Para determinar la ecuación de la recta, definimos el plano que contiene a la recta que deseamos, llamada s, que es perpendicular a la recta r, donde el vector normal del plano y el director de la recta r serán iguales, siendo $\vec{n}=\overrightarrow{dr}=(1,2,2)$

Luego, como el plano pasa por el punto $P\ (1,1,1)$:

$$x+2y+2z+D=0 \;\rightarrow\; 1+2\cdot1+2\cdot1+D=0 \;\rightarrow\; D=-5$$

El plano será $\pi\equiv x+2y+2z-5=0$. Por tanto, la intersección del plano con la recta, para determinar el punto de corte será:

$$r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \;\rightarrow\; (1+\lambda)+2\cdot(2+2\lambda)+2\cdot(3+2\lambda)-5=0$$

$$1+\lambda+4+4\lambda+6+4\lambda-5=0 \;\rightarrow\; 9\lambda=-6 \;\rightarrow\; \lambda=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$$

El punto de corte entre ambos será:

$$M=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Por tanto, la ecuación será:

$$s\equiv\begin{cases} P\ (1,1,1) \\ \overrightarrow{ds}=\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\end{cases} \rightarrow\; s\equiv\begin{cases} x=1-\frac{2}{3}\mu \\ y=1-\frac{1}{3}\mu \\ z=1+\frac{2}{3}\mu\end{cases}$$

Ejercicio 6

Sabemos que:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\iint f''(x)\,dx$$

Por tanto, para obtener la función, debemos de integrar dos veces.

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=e^{x-1}-\ln x+C$$

$$f(x)=\int(e^{x-1}-\ln x+C)\,dx=e^{x-1}+Cx-\int\ln x\ dx \;\rightarrow\; \begin{cases} u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ v=x & dv=dx\end{cases}$$

$$f(x)=e^{x-1}+Cx-\int\ln x\ dx=e^{x-1}+Cx-x\cdot\ln x+\int dx=e^{x-1}-x\cdot\ln x+x+Cx+D$$

Como la función pasa por $Q\ (1,0)$ y por $P\ (2,e-2-2\ln(2))$, calculamos C y D.

$$Q\rightarrow\quad e^0-1\cdot\ln 1+1+C+D=0\;\rightarrow\; C+D=-2$$
$$P\rightarrow\quad e^1-2\cdot\ln 2+2+2C+D=e-2-2\ln 2\;\rightarrow\; 2C+D=-4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que el valor de $C=-2$ y el de $D=0$, por tanto, la función será:

$$f(x)=e^{x-1}-x\cdot\ln x+x-2x$$
$$f(x)=e^{x-1}-x\cdot\ln x-x$$

Ejercicio 7

En primer lugar, completamos la tabla, definiendo los parámetros en ella.

	$\boldsymbol{C: Coches}$	$\boldsymbol{M: Motos}$	$\boldsymbol{Total}$
$\boldsymbol{A: Aptos}$	116 383	160 667	277 050
$\boldsymbol{\bar{A}: No\ aptos}$	2 679	3 447	6 126
$\boldsymbol{Total}$	119 062	164 114	283 176

a)

$$P(M\cup A)=P(M)+P(A)-P(M\cap A)=\frac{164\,114}{283\,176}+\frac{277\,050}{283\,176}-\frac{160\,667}{283\,176}=\frac{280\,497}{283\,176}=0{,}99$$

b)

$$P(\bar{A}/C)=\frac{P(C\cap\bar{A})}{P(C)}=\frac{\frac{2\,679}{283\,176}}{\frac{119\,067}{283\,176}}=\frac{2\,679}{119\,062}=0{,}022$$